HX3 **Mathématiques**

Devoir surveillé N^{o}11

Samedi 7 juin 2003

- Durée : 4 heures -

L'épreuve est composée d'un exercices et de trois problèmes indpéendants. Le troisième problème est à rédiger sur un ensemble de copies distinct de celui destiné à l'exercice et les deux premiers problèmes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction.

Trigonalisation simultanée d'endomorphismes unipotents.

On notera $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour un entier $n \geqslant 1$, on notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, que l'on identifiera à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé. On note SO (n) le groupe des matrices orthogonales de déterminant 1.

On désigne par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathcal{L}(E)$ étant l'ensemble des endomorphismes de E et GL (E) celui des endomorphismes inversibles.

On dit qu'une partie F de E est *laissée stable* par un endomorphisme T si l'on a $T(F) \subset F$.

On appelle *commutant d'une partie* X *d'une algèbre* Y l'ensemble des éléments de Y qui commutent avec tous les éléments de X.

On admettra qu'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle.

Préliminaires :

1) Soit u un endomorphisme de E tel que tout vecteur non nul soit vecteur propre. Montrer que u est une homothétie.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $l_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathrm{Tr}(AM) \in \mathbb{K}$. Démontrer que si l_A est nulle, alors $A = 0$.

3) Soit u et v deux endomorphismes de E commutant : $u \circ v = v \circ u$. Montrer que les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

I. Première partie :

1) Soit X une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que le commutant de X est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonale avec coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n$.

a . On suppose qu'il existe deux indices k et l tels que $a_k \neq a_l$. Vérifier que si $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ commute avec A, $b_{k,l} = 0$.

b . On suppose que les a_k sont deux en deux distincts. Préciser le commutant de $\{A\}$. Quelle est sa dimension ?

c . On ne suppose plus les a_k deux à deux distincts. Quelle est la dimension du commutant de $\{A\}$ dans ces conditions ?

3) Déterminer le commutant de SO (2) dans l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

4) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien orienté, on considère r une rotation d'axe orienté par un vecteur e non nul et d'angle θ non congru à 0 modulo 2π. Montrer que si u est un endomorphisme qui commute avec r, e est un vecteur propre de u.

5) Montrer que le commutant de SO (3) dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de la forme λI_3 avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

6) Déterminer le commutant de SO (n) pour $n \geqslant 3$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II. Deuxième partie :

Une partie W de $\mathcal{L}(E)$ est dite *irréductible* si $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de W.

1) Montrer que si E est un espace euclidien, $SO(E)$ est irréductible (on commencera par le cas où E est un plan euclidien).

2) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le commutant d'une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$ est constitué des homothéties.

3) Ce résultat subsiste t-il lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

III. Troisième partie :

Un élément A de $\mathcal{L}(E)$ est dit *unipotent* si $A - I_E$ est nilpotent, i.e. s'il existe un entier $k > 0$ tel que $(A - I)^k = 0$.

On se propose de démontrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et si G est un sous-groupe de GL (E) formé d'éléments unipotents, E admet une base dans laquelle tous les éléments de G sont représentés par des matrices triangulaires supérieures avec coefficients diagonaux égaux à 1.

1) Soit A un élément unipotent.

a. Démontrer que 1 est valeur propre de A.

b. Démontrer que A est inversible.

c. Calculer $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (I - A)^k$.

2) Traiter le cas où $n = 2$ et où G est l'ensemble des puissances d'un élément A_0. Dans ce cas est-il nécessaire de supposer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

On suppose maintenant $n \geqslant 1$ et on rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3) Vérifier que le sous-espace vectoriel W de $\mathcal{L}(E)$ engendré par G est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

4) Soit $A, A' \in G$. Calculer $\mathrm{Tr}(A - I_E)$, $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A - I_E)A'$.

5) Supposant en outre G irréductible, montrer que G est réduit à I_E, et préciser la valeur de n (on pourra utiliser le résultat suivant, qui sera démontré dans la quatrième partie : si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et W est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ irréductible, alors $W = \mathcal{L}(E)$).

6) Ne supposant plus G irréductible, démontrer l'existence d'un vecteur non nul x de E tel que $A(x) = x$ pour tout $A \in G$

7) Conclure.

IV. Quatrième partie :

Le but de cette partie est de démontrer le résultat admis à la question III.5) :

"Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, W une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$, alors $W = \mathcal{L}(E)$".

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, W une sous-algèbre irréductible de E. On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et on identifie les éléments de $\mathcal{L}(E)$ à leur matrice dans cette base. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on désigne par

• V_i l'ensemble des matrices $A = (a_{k,l})_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$ avec $a_{k,l} = 0$ si $l \neq i$.

• L_i l'application de E dans V_i telle que le coefficient d'indice k, l de $L_i(x)$ soit $\delta_{i,l} x_k$ où $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

• P_i l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans V_i telle que le coefficient d'indice k, l de $P_i(A)$ soit $\delta_{i,l} A_{k,i}$ où les $A_{i,j}$ sont les coefficients de A.

Enfin, on note Φ l'application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ qui à A associe

$$\Phi(A) : B \longmapsto \Phi(A)(B) = A \circ B.$$

1) Démontrer les assertions suivantes :

a . V_i est stable par tous les $\Phi(A)$ pour $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\Phi(A)(L_i(x)) = L_i(A(x))$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

b . $\Phi(A) \circ P_i = P_i \circ \Phi(A)$.

c . $W \cap V_i$ est $\{0\}$ ou égal à V_i.

2) Construire un sous-espace W' de $\mathcal{L}(E)$, supplémentaire de W et laissé stable par tous les $\Phi(A)$ pour $A \in \mathcal{L}(E)$.

On note π le projecteur de $\mathcal{L}(E)$ sur W parallèlement à W' ; pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on pose

$$A_{i,j} = L_j^{-1} \circ P_j \circ \pi \circ L_i \in \mathcal{L}(E).$$

3) Montrer que $A_{i,j}$ est un multiple de I_E que l'on notera $a_{i,j} I_E$.

4) Vérifier les égalités suivantes :

a . $\pi(I_E) = I_E$.

b . $\sum_{i=1}^{n} L_i(e_i) = I_E$.

c . $P_i(I_E) = L_i(e_i)$.

5) Déterminer $a_{i,j}$.

6) Conclure.