HX3 Mathématiques

Devoir surveillé N^{o}10

Samedi 18 mai 2003

- Durée : 4 heures -

L'épreuve est composée d'un exercices et de trois problèmes indpéendants. Le troisième problème est à rédiger sur un ensemble de copies distinct de celui destiné à l'exercice et les deux premiers problèmes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction.

Exercice :

Soit $\alpha > 1$ un réel.

1) Démontrer que la fonction $x \in [2, +\infty[\longmapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est intégrable.

2) Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$?

Problème 1 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} \mathrm{d}t$.

1) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

2) Montrer que, pour tout réel $b > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \leqslant b \implies e^x - 1 - x \leqslant \frac{1}{2} e^b x^2 \quad \text{et}$$

$$x \geqslant -b \implies e^x - 1 - x \geqslant \frac{1}{2} e^{-b} x^2.$$

3) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\varphi_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en a, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(a) = (x-a)\left[-\int_0^{\pi/4} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} \mathrm{d}t + \varphi_a(x)\right].$$

En déduire que f est dérivable et préciser la dérivée de f.

4) On note P une primitive de $u \longmapsto e^{-u^2}$ sur $\mathbb{R}$. À tout réel x, on associe

$$Q_x : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[= I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & P(x \tan t) \end{array}.$$

a. Montrer que Q_x est dérivable et expliciter Q'_x.

b. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = x\int_0^{\pi/4} \frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

5) Soit $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x^2)$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

b. Que peut-on dire de la fonction h définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 \quad ?$$

6) Montrer que $u \longmapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\mathrm{d}u$.

Problème 2 :

Dans le problème, I désigne un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

I. Première partie :

On se donne trois fonctions continues $A, B, C : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ un réel distinct de 1 et on considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad A(x)y' + B(x)y + C(x)y^\alpha = 0,$$

appelée *équation de Bernoulli.*

On suppose que A ne s'annule pas sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On appelle *solution maximale relative à* (E) *et à la condition initiale* $y(x_0) = y_0$ un couple (y, J) où J est un intervalle ouvert inclus dans I, contenant x_0, $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable solution de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$ et telle que si $z : J' \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (E) vérifiant $z(x_0) = y_0$, alors $J' \subset J$ et z et y coïncident sur J'.

On admettra alors que pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple (y, J) solution maximale relative à (E) et à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

1) Soit (y, J) une solution maximale de (E). On suppose que la borne supérieure de J est réelle. On la note b et on suppose de plus que $b \in I$. Démontrer que $y(x)$ ne peut admettre de limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures.

2) Soit $x_0 \in I$. Soit (y, J) une solution maximale relative à la condition $y(x_0) = 0$. Montrer que $J = I$ et que y est la fonction nulle.

3) Soit $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E). Montrer que si y s'annule en un point, y est identiquement nulle.

4) Soit $y_0 > 0$. On considère (y, J) une solution maximale relative à (E) et à la condition $y(x_0) = y_0$. Démontrer que pour tout $x \in J$, $y(x) > 0$.

5) Soit $y : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable. On pose $z = y^{1-\alpha}$. Montrer alors que (E) est équivalente à une équation différentielle du premier ordre en z.

II. Deuxième partie :

On considère (E_1) $xy' + y - xy^3 = 0$ pour $x \in I = \mathbb{R}_+^*$.

1) Que dire d'une solution de (E_1) s'annulant en un point x_0 ? Soit $x_0 \in I$. Comment peut-on déduire les solutions de (E_1) vérifiant $y(x_0) < 0$ de celles vérifiant $y(x_0) > 0$?

On s'intéresse aux solutions à valeurs strictement positives de (E_1). Soit $y : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivable tel que $J \subset \mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que (E_1) est équivalente à une équation différentielle (F) du premier ordre en z.

3) Résoudre (F).

4) Exprimer toutes les solutions $y : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de (E). Pour chacune d'entre-elles, on précisera quel est le domaine de définition maximal contenu dans $\mathbb{R}_+^*$.

5) Soit $y_0 > 0$.

a. Donner le domaine de définition et l'expression de la solution maximale de (E_1) relative à la condition de $y(1) = y_0$.

b. Préciser en fonction de y_0 les limites aux bornes du domaine de y.

c. Représenter graphiquement les solutions de (E_1).

III. Troisième partie :

On se donne quatre fonctions continues $A, B, C, D : I \longrightarrow \mathbb{R}$, et on considère l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad A(x)y' + B(x)y + C(x)y^2 + D(x) = 0,$$

appelée *équation de Riccati.*

1) Soit Y_0 une solution de (E_2). Que devient (E_2) si on fait le changement de fonction inconnue $Y = y - Y_0$?

2) On considère (E_3) $y' + 3y + y^2 + 2 = 0$.

a. Montrer que (E_3) possède deux solutions particulières constantes. On note Y_0 la plus grande de ces deux fonctions constantes.

b. Soit $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E_3). Que peut-on dire de y si y prend la valeur -1 en un point ?

c. Montrer que les solutions de (E_3), autre que Y_0, sont exactement les fonctions

$$y : x \longmapsto -\frac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1} \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel arbitraire.}$$

Pour chacune des solutions, on donnera le domaine le définition et les limites aux bornes du domaine.

d. Représenter les courbes intégrales correspondantes à (E_3).

Problème 3 : (deuxième ensemble de copies)

K désigne un corps commutatif. On fixe un entier non nul n et on note

$$\mathrm{SL}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K), \det M = 1\}.$$

Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ dont les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1. On rappelle que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$.

On appelle *matrice de transvection* les matrices de la forme $I_n + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$

et *matrice de dilatation* les matrices de la forme

$$D_n(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \in K^*.$$

I. Première partie :

1) Soit $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$ et $\lambda \in K$. On note $M = I_n + \lambda E_{ij}$, matrice de transvection. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}. En déduire que M^{-1} est aussi une matrice de transvection.

2) a. Soit $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$ et $\lambda \in K$ et $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Par quelles opérations sur les lignes et les colonnes de M se déduisent les matrices $(I_n + \lambda E_{ij})M$ et $M(I_n + \lambda E_{ij})$.

b . Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. En déduire qu'il existe des matrices de transvections $B_1, \dots, B_p, B'_1, \dots, B'_q$ telles que

$$B_1 \cdots B_p A B'_1 \cdots B'_q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \quad \text{où } B \in \mathrm{GL}_{n-1}(K).$$

3) Montrer par récurrence sur n que pour toute matrice A de $\mathrm{GL}_n(K)$, il existe des matrices de transvections $C_1, \dots C_r, C'_1, \dots, C'_s$ telles que

$$A = C_1 \cdots C_r D_n(\det A) C'_1 \cdots C'_s.$$

4) Montrer que les transvections et les dilatations engendrent le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ (i.e. que tout sous-groupe contenant toutes les translations et les dilatations est $\mathrm{GL}_n(K)$ tout entier).

5) Montrer que les transvections engendrent le groupe $\mathrm{SL}_n(K)$.

II. Deuxième partie :

On appelle *commutateur* toute matrice de la forme $ABA^{-1}B^{-1}$ avec $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$. On note D le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ engendré par les commutateurs : c'est l'ensemble des produits quelconques de commutateurs. D est appelé *groupe dérivé de* $\mathrm{GL}_n(K)$.

1) Quelle inclusion peut-on écrire entre D et $\mathrm{SL}_n(K)$?

2) On suppose dans cette question $n \geqslant 3$.

a. Soit $\lambda \in K$ et $i, j, k \in [\![1, n]\!]$ deux à deux distincts.
Que vaut le produit $(I_n + \lambda E_{i,k})(I_n + E_{k,j})(I_n - \lambda E_{i,k})(I_n - E_{k,j})$?

b. Montrer que $D = \mathrm{SL}_n(K)$.

3) On suppose dans cette question $n = 2$ et $\mathrm{Card} K \geqslant 4$.

a. Soit $(\alpha, \beta) \in K \times K^*$.
Que vaut le produit $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

b. Montrer que $D = \mathrm{SL}_n(K)$.