HX3 Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ N^{o}1

Samedi 21 septembre 2001

- Durée : 3 heures -

L'exercice et les deux problèmes sont totalement indépendants.

On prendra bien soin de préciser toute notation non donnée dans l'énoncé. Toute affirmation devra être justifiée. Les récurrences ne sauraient être commencées sans une formulation claire de l'hypothèse de récurrence.

Il n'est pas interdit d'admettre certains éléments de démonstration (voire des questions entières) afin de ne pas rester bloqué. Mais ils doivent absolument être mentionnés.

On laissera une marge à gauche.

Il est demandé de ne pas recopier l'énoncé, on mettra seulement en évidence les numéros des questions traitées. Il est recommandé par contre d'annoncer ce qui va être démontré et éventuellement par quel type de raisonnement (récurrence, absurde, contraposée...). Seules les conclusions et les résultats mis en valeur seront pris en compte.

Enfin, les solutions doivent être rédigées et le formalisme utilisé avec parcimonie. La présentation et la rédaction pourront représenter jusqu'à 15% *de la note obtenue.*

Exercice :

Soit $f : E \longrightarrow F$ injective. On pose $\varphi : B \in \mathcal{P}(F) \longmapsto f^{<-1>}(B) \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que φ est surjective.

Problème : Une caractérisation de $\mathbb{N}$

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble totalement ordonné non vide. On suppose que :

- E est bien ordonné i.e. toute partie non vide admet un plus petit élément.
- E n'a pas de plus grand élément.
- Toute partie non vide et majorée admet un plus grand élément.

1) Justifier que E est un ensemble infini.

2) On pose $\Psi(0) = \min E$, $\Psi(1) = \min E\backslash\{\Psi(0)\}$, $\Psi(2) = \min E\backslash\{\Psi(0), \Psi(1)\}$,..., $\Psi(n) = \min E\backslash\{\Psi(0), \Psi(1), \dots \Psi(n-1)\}$.

a. Justifier que l'on définit bien ainsi une application de $\mathbb{N}$ dans E.

b. Montrer que Ψ est strictement croissante.

c. Démontrer que Ψ est surjective.

d. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow E$ strictement croissante et bijective. Démontrer que $\varphi = \Psi$.

3) Soit E une partie infinie de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une unique suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$, strictement croissante telle que $E = \{r_n \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$.

Problème : Espaces topologiques

Soit E un ensemble. On appelle *topologie de E* toute famille $\mathcal{O}$ de parties de E telle que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille finie $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ de $\mathcal{O}$, on a $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{O}$.
2. Pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{O}$, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.
3. $\emptyset$ et E sont dans $\mathcal{O}$.

Un ensemble muni d'une topologie est un *espace topologique*. Un élément de $\mathcal{O}$ est appelé *ouvert de E*.

Par exemple, $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$ est une topologie de E. Il en va de même de $\mathcal{O} = \{\emptyset, E\}$.

I. Première partie : Généralités et premiers exemples

1) Soient E un ensemble et

$$\mathcal{O} = \left\{U \in \mathcal{P}(E), \complement_E U \text{ est fini ou } U = \emptyset\right\}$$

Montrer que $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique.

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On appelle *fermé de E* toute partie de E dont le complémentaire est ouvert.

2) a. Montrer que $\emptyset$ et E sont des fermés de E.

b. Soit $F_1, \ldots, F_n$ des fermés de E. Montrer que $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ est fermé.

c. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E. Montrer que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé.

3) Soit $A \subset E$. On appelle *topologie induite sur A* l'ensemble :

$$\mathcal{O}_A = \{U \cap A,\ U \in \mathcal{O}\}$$

a. Démontrer que $\mathcal{O}_A$ est une topologie de A.

b. Soit $G \subset A$. Montrer l'équivalence des conditions :

(i) G est un fermé de $(A, \mathcal{O}_A)$.

(ii) Il existe un fermé F de $(E, \mathcal{O})$ tel que $G = F \cap A$.

II. Deuxième partie : intérieur et adhérence

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. Pour toute partie A de E, on définit l'*intérieur de A* comme l'ensemble $\mathring{A}$ des points $x \in E$ tel qu'il existe U ouvert de E tel que $x \in U$ et $U \subset A$. On définit également l'*adhérence de A* comme l'ensemble $\bar{A}$ des points $x \in E$ tel que pour tout ouvert U contenant le point x, $U \cap A \neq \emptyset$. Soit $A \subset E$.

1) Soit $x \in E$. Démontrer que $\complement_E \mathring{A} = \overline{\complement_E A}$. En déduire $\complement_E \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E A}}$.

2) Démontrer que $\mathring{A}$ est ouvert. En déduire que $\bar{A}$ est fermé.

3) a. Démontrer que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A (i.e. dans $\{U \in \mathcal{P}(E), U \subset A,\ U \text{ ouvert }\}$ muni de l'ordre de l'inclusion, $\mathring{A}$ est le plus grand élément).

b. En déduire que $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

4) En utilisant la question précédente, montrer que si $A \subset B \subset E$, $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ (resp. $\bar{A} \subset \bar{B}$), puis que $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ (resp. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$).

5) Soit $B \subset E$.

a. Montrer que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

b. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

6) On munit $\mathbb{N}$ de la topologie donnée en **I.1)**. Préciser l'adhérence de $A \subset \mathbb{N}$ en distinguant différents cas.

III. Troisième partie : fonctions continues

Soient E et F deux espaces topologiques. Si $f : E \longrightarrow F$, $a \in E$, on dit que f est *continue en a* si pour tout ouvert W de F contenant $f(a)$, il existe un ouvert V de E contenant a tel que $f(V) \subset W$. On dit que f est *continue* si f est continue en tout point de E.

1) Soit $f : E \longrightarrow F$ constante. Montrer que f est continue. De même, montrer que $I_E : x \longmapsto x$ est continue de E dans E.

2) Soient G un espace topologique, $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $a \in E$, $b = f(a)$. On suppose f continue en a et g continue en b. Montrer que $g \circ f$ est continue en a.

3) Soit $f : E \longrightarrow F$. On suppose que pour tout ouvert V de F, $f^{<-1>}(V)$ est un ouvert de E. Montrer que f est continue.

4) Soit $f : E \longrightarrow F$ continue. Soit V un ouvert de F. Démontrer que $f^{<-1>}(V)$ est un ouvert de E.

5) Soit $f : E \longrightarrow F$. Montrer l'équivalence des trois conditions suivantes :
(i) f est continue.
(ii) Pour tout ouvert V de F, $f^{<-1>}(V)$ est un ouvert de E.
(iii) Pour tout fermé G de F, $f^{<-1>}(G)$ est un fermé de F.

6) On munit $\mathbb{N}$ de la topologie donnée en **I.2)**. Caractériser les fonctions continues $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Que dire des fonctions :

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto \mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N} \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

IV. Quatrième partie : topologie engendrée

Soit E un ensemble.

1) Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in I}$ deux familles de parties de E. Prouver que :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$$

Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$, $\emptyset \in \mathcal{S}$ et $E \in \mathcal{S}$.

2) On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des réunions d'intersections finies de parties de $\mathcal{S}$. Ecrire la forme d'un élément de $\mathcal{O}$. Montrer à l'aide de la question précédente que $\mathcal{O}$ est une topologie.

$\mathcal{O}$ est appelée la *topologie engendrée par $\mathcal{S}$*. Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont deux topologies de E, on dit que $\mathcal{T}'$ est *plus fine que* $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

3) Pourquoi la relation "être plus fine" est-elle une relation d'ordre sur l'ensemble des topologies de E ? Y a t-il un plus petit (resp. grand)élément ?

4) Montrer que $\mathcal{O}$ est la moins fine des topologies de E qui contient $\mathcal{S}$.

5) Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux topologies sur E. Montrer que $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$ si, et seulement si :

$$I_E : \begin{array}{ccc} (E, \mathcal{O}) & \longrightarrow & (E, \mathcal{O}') \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

est continue.

Soient F un espace topologique, $f : E \longrightarrow F$.

6) Préciser la topologie la moins fine pour laquelle f est une fonction continue ?

Perspectives :

Nous verrons plus tard de nombreux exemples d'espaces topologiques sur lesquelles nous considèrerons des fonctions continues, sans le plus souvent abuser des termes et de l'axiomatique de la topologie que nous avons développés ici. Le premier exemple pertinent d'ensemble muni d'une topologie sera le corps des nombres réels $\mathbb{R}$. La topologie en question est appelée *topologie de l'ordre* : les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les réunions quelconques d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ au sens usuel sont en fait les fonctions continues pour $\mathbb{R}$ muni de cette topologie.